確率・統計処理 & 真値推定

カルマン・フィルタ 入門

Part 3: 力学

リニア・テック　別府 伸耕

linear tec : Nobuyasu Beppu

力学

Sample

1. イントロ
2. 力学
3. 解析力学
4. 倒立振子のモデル作成例

「力学」のキー・ポイント

Sample

- 力学と解析力学の本質は同じ．道具としての特性が違う．
- 力学は，「力」と「座標」で運動を記述する．
- 解析力学は，「エネルギ」と「運動量」で運動を記述する．

「波動」を扱う分野は，解析力学と相性が良い．

「力学」の概要

Sample

	並進運動	回転運動
質点 （1つの物体）	質点の並進運動	質点の回転運動
質点系 （たくさんの物体）	質点系の並進運動 （剛体の並進運動）	質点の回転運動 （剛体の回転運動）

※上記の枠組みとは独立して，回転座標を題材とした「座標変換」も扱う.

ニュートンの運動方程式：Newton's equation of motion

質量が "m (kg)" の物体に "$\boldsymbol{F}$ (N)" の力が印加されたときの運動は，
次の「ニュートンの運動方程式」によって表される．

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2} = \boldsymbol{F} \quad \text{あるいは，} \quad m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$$

上式は，次のように解釈できる．

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}$$

「力」：
加速度を変化させる原因．

「質量」（慣性質量）：
加速度の変化しにくさ．

「加速度」：
物体の未来の挙動に関する情報を持つ．

なお，ニュートンの運動方程式は，x，y，zの3方向の式をまとめたものになっている．

$$\begin{pmatrix} m\dfrac{d^2r_x(t)}{dt^2} \\ m\dfrac{d^2r_y(t)}{dt^2} \\ m\dfrac{d^2r_z(t)}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

オイラーの回転運動方程式：Euler's rotation equation

「ニュートンの運動方程式」の両辺について，「原点Oに対するモーメント」を求める．
（位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ との外積を計算する．）

$$\boldsymbol{r}(t) \times \frac{d\boldsymbol{p}(t)}{dt} = \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{F}(t)$$

上式の左辺に関連して，運動量$\boldsymbol{p}$のモーメント"$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$"の時間微分について考える．
同じベクトルどうしの外積は $\mathbf{0}$ になるので"$\dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \mathbf{0}$"が成り立つことに注意すると，
次式が得られる．

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{p}} = \dot{\boldsymbol{r}} \times (m\dot{\boldsymbol{r}}) + \boldsymbol{r} \times (m\ddot{\boldsymbol{r}}) = \mathbf{0} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

上式を利用すると，元の運動方程式を次のように変形できる．

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

「角運動量」(angular momentum)：$\boldsymbol{L}(t) = \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{p}(t)$

「トルク」(torque)：$\boldsymbol{N}(t) = \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{F}(t)$

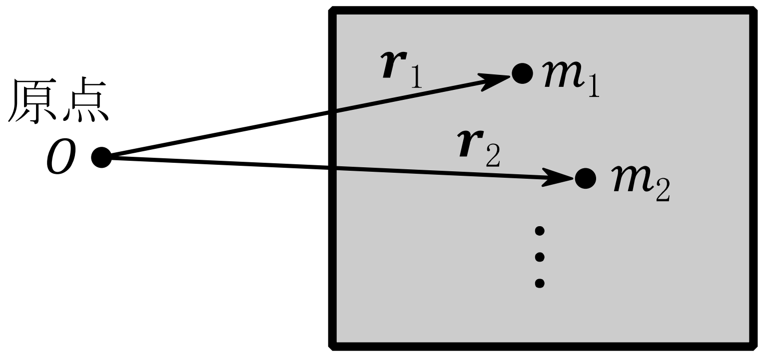
以上のことから，次の「オイラーの回転運動方程式」が得られる．

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{L}(t)}{dt} = \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{F}(t)}$$

質点系: system of particles

これまで「物体」として考えてきたものは,
質量mが空間上の1点に集中している「質点」(point mass)と呼ばれるものだった.

現実に存在する物体は空間的に広がっており, いわゆる「(空間的な)大きさ」がある.
このような現実に存在する物体は, 「多数の質点の集合体」として扱うことができる.
多数の質点をまとめたものを, 「質点系」(system of particles)という.



「大きさのある物体」は
多数の質点の集まり.

これ以降, 1つ1つの質点に対して "$m_1, m_2, \cdots, m_n$" と番号を振って扱うことにする.
また, 原点Oから各質点へ向かう位置ベクトルを "$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n$" とする.

「ラグランジュの運動方程式」

Sample

次式は，「ラグランジュの運動方程式」と呼ばれる．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

上式に含まれる“L”は「ラグランジアン」と呼ばれるもので，
運動エネルギ“K”と位置エネルギ“U”を使って次のように定義される．

$$L=K-U$$

上式に含まれる“q_i”は「一般化座標」，“$\dot{q}_i$”は「一般化速度」と呼ばれる．
具体的な座標としては，実際のxyzといった座標や，$r\theta\varphi$といった極座標などが用いられる．

ラグランジュの運動方程式は，ニュートンの運動方程式と等価である．
計算処理を進めやすいように，ニュートンの運動方程式を変形したものだと見なせる．

倒立振子の構造の簡略化

「車輪型倒立振子」を，次図のようにモデル化する．
ここでは単純に，「車輪」部分と「振子」部分だけから構成されるものと考える．
変数は次の2つとする．

- “θ_p” 振子部分の垂直方向からの傾き角．
- “θ_w” 車輪の，振子部分に対する回転角．